Differentialgleichungen für Schule und Studium

Teil 1

Differentialgleichungen 1. Ordnung

Lösung durch Integration

Trennung der Variablen

Sehr viele Lösungsbeispiele

Die ersten Abschnitte sind auch
für die Oberstufe des Gymnasiums geeignet

Datei 5[illegible]001

Stand 6. Januar 2023

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik
und Studium

www.mathe-cd.de

Inhalt

Die Lösungen der Differentialgleichungen mit einer Nummer wie **B1** werden ausführlich gezeigt

0 Einleitung und wichtige Hinweise

1. Ziel des Textes

Differentialgleichungen sind ein so umfangreiches Thema, dass die Abhandlungen dazu ganze Bücherregale füllen. Für **Schulen** ist dieses Thema nur am Rande einsetzbar, weil es so viele Methoden gibt, die immer nur zu einer bestimmten Art Gleichung passen, und weil die Theorie dazu ganze Vorlesungen an den **Hochschulen** füllt. Und dennoch schreibe ich jetzt einige Texte, die ich zumindest teilweise so gestalten will, dass sie für Lehrer Leitfaden für einige Unterrichtsstunden sein können, für interessierte Schüler (z. B. Facharbeit) verständlich werden, und für Studenten den Hochschulstoff anschaulicher werden lässt.

2. Was sind Differentialgleichungen?

In diesem Wort steckt der Begriff Differential, den man vor der Einf… ung der Differentialr… nung her noch kennen solle. Bei der Einführung der Ableitung… Funktio… 'det man den D… rential-quotienten $\frac{dy}{dy}$, für den man dann auch $f'(x)$ oder y‘ schr… t.

Unter einer **Differentialgleichung** versteh… eine Gleichu… in de… hen der unabhängig Veränderlichen x auch noch eine Funktion … un… on Able… gen y‘, … usw. vorkommen können. An der Hochschule dürfen … sogar m… re Va… u… mehrere Funktionen, sowie deren Ableitungen sein.

Beispiele:

a) $y' - 3x = 0$ ist eine seh… che Differenti… eichung. Und die Funktion $y = \frac{3}{2}x^2 + 4$ erfüll… Da… nt man, … ist ein… pezielle Lösung dieser Differentialgleichung. D… kann man dadu… überprü… ss man sie zunächst ableitet: $y' = 3x$. Dann …etzt man y‘ in der Di… entialgleichung durch 3x, dann entsteht die wahre Aussage 0 = 0.

Jede … rentialgleich… hat jedoch unendlich viele Lösungsfunktionen, die man als Funktione… ar b… nnen kann. Hier lautet sie beispielsweise $y = \frac{3}{2}x^2 + C$.

b) $y' = 2y$ ist eine Differentialgleichung, welche z. B. von $y = 5e^{2x}$ gelöst wird. Zur Probe leitet man ab: $y' = 5^{2x} \cdot 2$. Dann ersetzt man y und y' in der Differentialgleichung und erhält die wahre Aussage $2 \cdot 5e^{2x} = 2 \cdot 5e^{2x}$.

Die allgemeine Lösung ist die Schar $y = k \cdot e^{2x}$

c) $\boxed{y \cdot y' + x = 0}$ ist eine Differentialgleichung, die x, y und y‘ enthält. Ihre allgemeine Lösung besteht aus zwei Funktionenscharen: $y_1 = f_1(x) = \sqrt{k - x^2}$ und $y_2 = f_2(x) = -\sqrt{k - x^2}$, deren Schaubilder Halbkreise sind (solange k>0 ist).

An dieser Stelle wird noch etwas interessant:

Stellt man die Differentialgleichung so um: $\boxed{y' = -\frac{x}{y}}$, erhält man y‘ als Funktion von x und y.

Das bedeutet: Man kann zu jedem Punkt (der nicht auf der x-Achse liegt, also $y \neq 0$ hat) die Tangentensteigung der durch ihn gehenden Lösungskurve dir…

Die durch $P_1(6\,|\,2)$ gehende Scharkurve hat in P_1 die Tanger…isteigung $y' = \frac{\ }{2}$

Die Punkte auf der x-Achse (y=0) haben dagegen senkrecht…angenten.

Diese Untersuchungen werden im Text 50113 (G…he Lös… – Richtungsfel…) gezeigt.

d) $(y')^2 + y^2 = 1$ wird z. B. von $y = \sin x$ gelöst.

e) Die DGL $y'' + x \cdot y' = 2x - 1$ enthält … …eite Able…ng für d… Lösungsfunktion, weshalb sie **Differentialgleichung 2 …dnung** …

3. Hinweis

Es gibt so unglau… viele …en von Differentialgleichungen, dass es nicht möglich ist, ein Lösungsverfahre… …e anzubieter… …ele DGL sind sogar nicht lösbar.

Dah… …st es üb… …inige b… …nd… wichtige Typen zu untersuchen, und einige …hoden gründlich… …rchzusp… …hen.

Da… …schieht in diese… und den folgenden Texten.

1 Stammfunktionen als Lösungen von Differentialgleichungen

Gleichungen der Form: $\boxed{y' = g(x)}$

Die Ableitung einer Funktion ist eine neue Funktion: Aus $f(x) = x^2$ wird $f'(x) = 2x$.

Dazu gibt es diese Schreibweisen: $f'(x) = y'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$, die wir nun brauchen.

Alle vier Terme bezeichnen die 1. Ableitung einer Funktion f oder y.

Ich zeige nun, dass man besonders einfache DGL durch Integration lösen kann, denn bekanntlich sind Ableiten und Integrieren Umkehroperationen zuein

Beispiel $\boxed{B1}$: Wir bestimmen die allgemeine Lösung der ferentialgleichung $' = 2x$.

Man sollte sich ein wenig an erin :

Als **Stammfunktion** bezeichnet man eine „ursprüngliche n, dere ben ist. Die Berechnung einer Stammfunktion geschieht durch Umk rung r Ableitung, was Schüler auch gerne „Aufleiten“ nennen. Die bessere Bez hnung heißt „**in riere** azu schreibt man statt y' den Bruch $\frac{dy}{dx}$ (genannt **Differentialquotien** obe nd dx **ifferentiale** sind.)

Stellt man $y' = \frac{dy}{dx}$ um, erhält n formal $dy = y'\cdot d$ araus wird durch Integration dann

$y = \int dy = \int y'dx$, also ei ammfu n, die bis auf eine additive Konstante bestimmt ist.

In unserem spiel wi n aus $' = 2$ ie Gleichung $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Dann nnt man die Variable $dy = 2x \cdot dx$, schreibt das Integralzeichen davor

und bere t durch Integriere $\int dy = \int 2x\,dx$

$y + c_1 = x^2 + c_2$

Oder zusammenge $y = x^2 + C$ (mit $C = c_2 - c_1$).

Die Addition einer Konstanten C ist erforderlich, sie ist nur durch eine Zusatzbedingung berechenbar und verschwindet bei der Probe wieder. Man muss entweder beide Integrale eine Konstante setzen oder stattdessen nur eine auf der rechten Seite, quasi also Zusammenfassung beider Konstanten.

In späteren Rechnungen kommen weitere Umformungen dazu, sodass man die Konstante immer wieder ersetzt ….

Beispiel $\boxed{B2}$ Lösung der Differentialgleichung $y' = x^2 - 2x + 4$.

Lösung: **Aus** $\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x + 4$ wird durch

Trennung der Variablen $dy = \left(x^2 - 2x + 4\right)dx$

Integration: $y = f(x) = \int\left(x^2 - 2x + 4\right)dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x + C$

Zusatz: Die Integrationskonstante C soll durch sie Zusatzbedingung (Anfangsbedingung)
$f(2) = -1$ festgelegt werden: $f(2) = \frac{1}{3}\cdot 8 - 4 + 8 + C = \frac{20}{3} + C$

Vergleichen: $\frac{20}{3} + C = -1$

d. h. $C = -1 - \frac{20}{3} = -\frac{23}{3}$

Ergebnis: $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x - \frac{23}{3}$

Beispiel $\boxed{B3}$ Löse die Differentialgleichung $y' = \frac{1}{x+2}$ mit $f(3) = 5$

Kurzlösung: $y = f(x) = \int \frac{1}{x+2}dx = \ln|x+2| + C = \begin{cases} \ln(x+2) + C & \text{für } x > -2 \\ \ln(-x-2) + C & \text{für } x < -2 \end{cases}$

Einerseits ist: $f(3) = \frac{1}{3+2} + C = \frac{1}{5} + C$

Andererseits: $f(3) = 5$

Vergleichen: $\frac{1}{5} + C = 5 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{24}{5}$

Ergebnis: $f(x) = \begin{cases} \ln(x+2) + \frac{24}{5} & \text{für } x > -2 \\ \ln(-x-2) + \frac{24}{5} & \text{für } x < -2 \end{cases}$

Beispiel $\boxed{B4}$ Löse die Differentialgleichung $y' = \frac{1}{2}\sin(2x-1)$

Kurzlösung: $y = f(x) = \int \frac{1}{2}\cdot\sin(2x-1)dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos(2x-1)}{2} + C$

Ergebnis: $y = -\frac{1}{4}\cdot\cos(2x-1) + C$

3 Das Lösungsverfahren „Trennung der Variablen“

3.1 Grundlagen

B1 Bereits unsere erste ganz einfache Differentialgleichung in 1.1, nämlich $\boxed{y' = 2x}$, wurde mit dieser Methode gelöst.

Der erste Schritt besteht darin, y‘ umzuwandeln in den Differentialquotienten: $y' = \frac{dy}{dx}$

Dann wird nach x und y geordnet (y nach links, x nach rechts):

$$y' = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\boxed{dy}}_{y-\text{Term}} = \boxed{2x\cdot}$$

Die Variablen sind jetzt getrennt: links y, rechts x.

Der zweite Schritt ist die Berechnung der Stam unktion uf beiden Seiten d Gleichung durch Anwendung von unbestimmten In n. (Ei dere Metho verwendet die Schreibweise von bestimmten Integralen. Siehe ite ten!)

Für die linke Seite gilt: $\int d$ C_1

Für die rechte Seite: $\int 2x\cdot$ $x^2 +$

Aus $dy = 2x\cdot dx$ wird als $y + C_1 = x^2$

Umformung: $y = \underbrace{+ C_2 - C_1}_{C}$

Oder gleich in einem itt: $y = x^2 + C$

Man nicht mständ vorgehen:
Ar de gibt ma der x- unktion eine Konstante C.

Die gesamte verkü Rechnung sieht in diesem einfachen Beispiel also so aus:

$$\boxed{=2x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\boxed{dy}}_{y-\text{Term}} = \underbrace{\boxed{2x\cdot dx}}_{x-\text{Term}}$$

$$y = \int 2x\cdot dx = x^2 + C$$

Ein weiteres Beispiel dieser Art:

B5

$$\boxed{y' = \frac{3}{x^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3\cdot x^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{dy = 3x^{-2}dx}$$

Die Variablen sind jetzt getrennt.

$$y = \int 3x^{-2}dx = 3\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + C = -3\frac{1}{x} + C = -\frac{3}{x} + C$$

Wie man erkennt, ist die allgemeine Lösung stets eine Funktionen- bzw. Kurvenschar.

B6 Die folgende Differentialgleichung enthält zusätzlich y:

$$\boxed{y' = 2y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2y \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{dy}{y}} = \boxed{2 \cdot dx}$$

Aus $\frac{dy}{y} = 2 \cdot dx$ wird also $\int \frac{dy}{y} = \int 2 \cdot dx$

Die Berechnung der Stammfunktion erfordert links die **Logarithmusfunktion** ln(x).

$$\boxed{\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C_1}$$

Es gibt zwei verschiedene Methoden, damit die Lösungsfunktion z[illegible]

1. Methode:

Aus $\int \frac{dy}{y} = \int 2 \cdot dx$ wird $\ln|y| = 2x + C$ (1)

Wegen $\boxed{\ln a = b \quad \Leftrightarrow \quad a = e^b}$ kann man weiter na[illegible]mstelle[illegible]

$$|y| = e^{2x+C}$$

Ohne Betrag: [illegible] $\pm e^{2x+C}$

Zerlegung der e-Potenz: [illegible] $\pm e$ [illegible] $= \pm e^C$ [illegible] $2x$

Ersetze $\pm e^C$ durch k: $\boxed{y = \text{[illegible]}^{2x}}$

2. Methode:

Viele verwenden bei s[illegible]er[illegible]chnungen di[illegible] Umformungstrick:

Tritt link[illegible]ogarithm[illegible]uf, nennt [illegible] die Konstante nicht C, sondern $\ln|K|$.

Da[illegible] wird so umg[illegible]mt und z[illegible]ngefasst:

$$\ln|y| = 2x + \ln|K|$$

$$\ln|y| - \ln|K| = 2x$$

$$\ln\left|\frac{y}{K}\right| = 2x \qquad (2)$$

$$\left|\frac{y}{K}\right| = e^{2x}$$

Und weiter: $\frac{y}{K} = \pm e^{2x}$

Und damit: $y = \pm K \cdot e^{2x}$

Zum Schluss wird man $\pm K$ in eine neue Konstante k umbenennen.

Die Lösung der Differentialgleichung ist also:

$$\boxed{y = k \cdot e^{2x}}$$

Man kann hier natürlich einige Zwischenschritte übergehen.

3.2 Große Beispielsammlung

Hier beginnt der Lösungsteil

B7 $\boxed{x \cdot y' = y}$ bzw. $\boxed{y' = \frac{y}{x}}$

Trennung der Variablen: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \boxed{\frac{dy}{y}} = \boxed{\frac{dx}{x}}$

Berechnung der Stammfunktionen durch Integration:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

$\ln|y| = \ln|x| + C$ oder $\ln|y| = \ln|x| + \ln|K|$. (S... e Seite 17.

Oder so:

$\ln|y| = \ln|x| + \ln|K|$ bzw. $\ln\left|\frac{y}{K}\right| = \ln|x| \Leftrightarrow$ ... $\Leftrightarrow$ ... $\Leftrightarrow y = \pm$...

Schreibt man dann noch $k = \pm K$, dann lautet die Lö... ng:

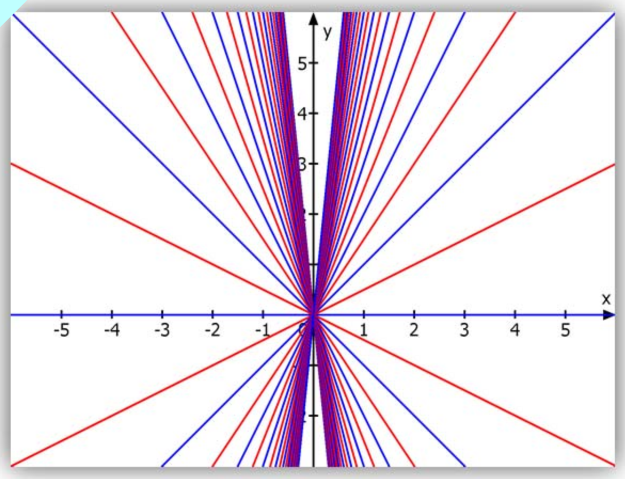
y ... x

Zusatz: Man kann von der al... ...einen Lös... zu eine... ...ären kommen, wenn eine Anfangs- oder **R**...**bedingung** gegeb... ... etwa $f(2) = 4$

Einsetzen ... t: $f(2) = k$... und aus $2k =$ ... erhält man k = 2: $y = f(x) = 2x$

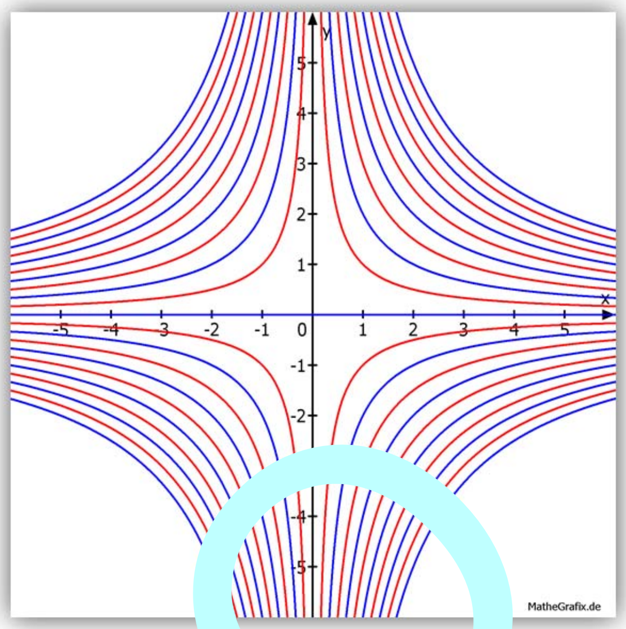
Das Scha... der Lösu... ...nktion ... Gera... ...schar: $y = k \cdot x$

Dargestell... die 21 Gerade... ür k von -10 bis + ... Step 0,5.



.

B8 $xy'+y=0$ bzw. $y'=-\frac{y}{x}$



Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$$

Stammfunktion:

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y|=-\ln|x|+C$$

$$|y|=e^{-\ln|x|+C}=e^{\ln|x|^{-1}}\cdot e^{C}$$

$$y=\pm e^{C}\cdot|x|^{-1}$$

Man kann bei $|x|$ den Betrag weglassen und die V[illegible]en zus[illegible]n mit e^C in eine neuen Konstanten k unterbringen:

$$y=\frac{k}{x}$$

B9 $x\cdot y'=2y$ [illegible]w. $y'=2\frac{y}{x}$

Trennung der Variable[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]mfunktion:

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{2}{x}dx$$

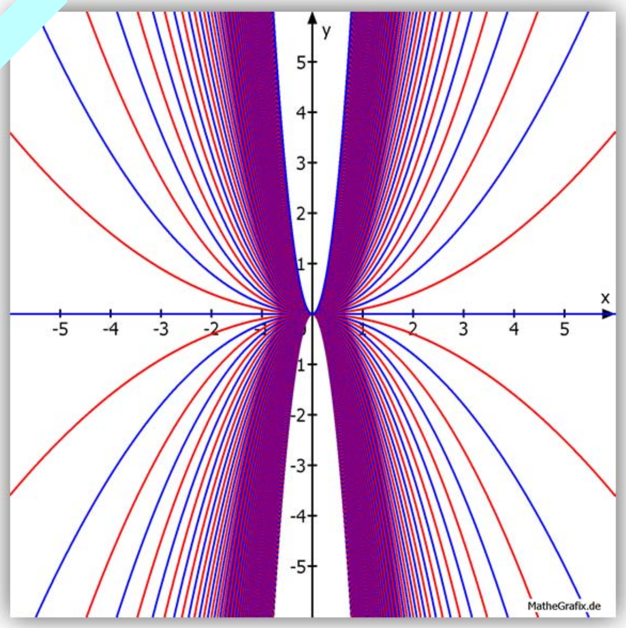
$$[illegible]$$

$$\ln\left|\frac{y}{K}\right|=\ln[illegible]$$

$$\left|\frac{y}{K}\right|=x^2 \quad \text{(Betrag rechts unnötig)}$$

$$\frac{y}{K}=\pm x^2 \Leftrightarrow y=\pm K\cdot x^2$$

$$y=k\cdot x^2$$

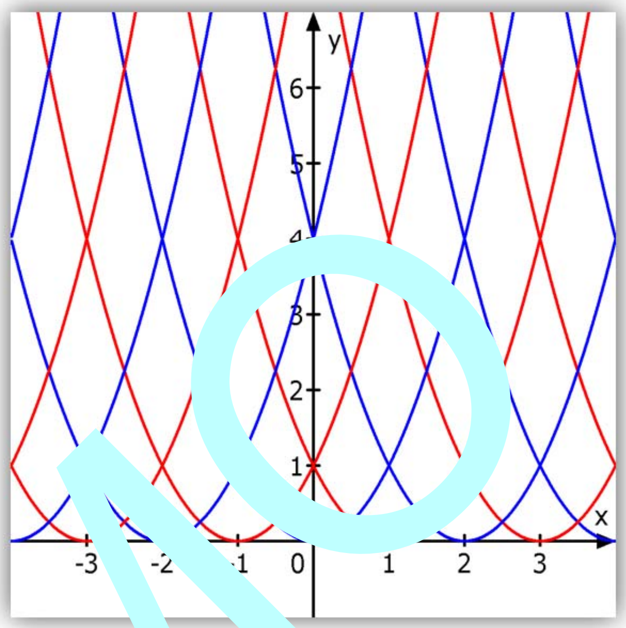


B10 $\boxed{y' = 2\sqrt{y}}$ für $y \geq 0$.

Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2 \cdot dx$$

Vorerst muss man y = 0 ausschließen!



Berechnung der Stammfunktionen:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 2dx$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int 2dx$$

$$\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2x + C$$

$$2\sqrt{y} = 2x + C \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{y} = x + \tfrac{1}{2}C$$

$$\sqrt{y} = x + k \qquad (1)$$

$$y = f(x) = (x+k)^2 \qquad (2)$$

Jetzt muss man nachdenken: Die D…ren…ichung … sagt, dass $y' = 2\sqrt{y}$ sein soll.

Das bedeutet, dass für die …ktionen die …schränk…en muss, dass $y' \geq 0$ ist.

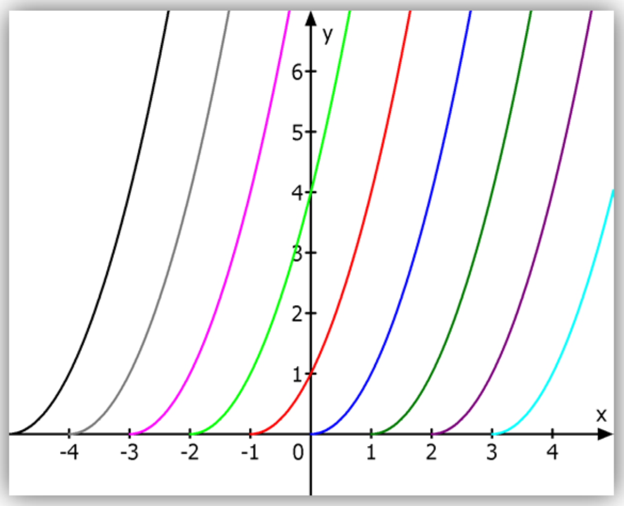
Von den Parabeln, die … Schaubilder der Lös…sfunktionen in Frage kommen, dürfen nur die jeweils rec…, ab den Sc…el aufsteigen… Bögen verwendet werden.

Hier begegnet eine… …s, was …n **beim Lösen von Wurzelgleichungen** bereits gelernt hat: Beim Quadrieren von (…nen Lösunge… …zu (weshalb man die Lösung überprüfen muss.)

Die L…o heiße… $y = f(x) = (x+k)^2$ für $x \geq -k$.

… ergibt y = 0. Di… oben w…d der Rechnung ausgeschlossenen Wert kann man …chträglich wieder zul…en!

Di… Schaubild darges…ten von links her fallend… Parabelböge… muss man sich bis hin zu…heit… „wegdenken“:



Wollte man die vollständigen Parabeln in den Lösungskurven haben (Abb. oben), müsste man die Differentialgleichung $\boxed{y' = 2\sqrt{|y|}}$ verwenden.

Fortsetzung im Original